JURNAL MATEMATIKA DAN KOMPUTER
Vol. 6. No. 2, 86 - 96, Agustus 2003, ISSN : 1410-8518

MENCERMATI BERBAGAI JENIS PERMASALAHAN DALAM PROGRAM LINIER KABUR

Mohammad Asikin
Jurusan Matematika FMIPA UNNES

Abstrak

Konsep baru tentang himpunan yang dapat dipandang sebagai perluasan dari himpunan klasik/tegas adalah himpunan kabur. Perluasan ini membawa pengaruh pula pada beberapa konsep lain seperti relasi kabur, bilangan kabur, logika kabur serta program linier kabur. Dalam program linier kabur dikenal pengklasifikasian: program linier dengan sumber kabur, program linier dengan sasaran kabur serta program linier dengan kendala kabur.

Kata kunci : himpunan kabur, bilangan segitiga, program linier kabur.

1. PENDAHULUAN

Sejak ditemukan oleh Zadeh pada tahun 1965, penelitian dalam himpunan kabur berkembang dengan pesatnya. Perkembangan itu mencakup baik aspek teori maupun aspek penerapannya. Salah satu penerapan himpunan kabur dalam riset operasi adalah masalah pemrograman linier. Masalah program linier tegas (klasik) adalah menentukan peubah yang tak diketahui sehingga fungsi sasaran linier dioptimumkan terhadap kendala yang diberikan. Masalah program linier dirumuskan dalam bentuk :

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimumkan} & cx \\ \text{Terhadap kendala} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad (1)$$

dengan x = $(x_1,...,x_n)^T \in R^n$ adalah peubah keputusan yang akan dicari , c = $(c_1,...,c_n)$ disebut koefisien sasaran dan A = $[a_{ij}] \in R^{mxn}$ disebut matriks kendala dengan koefisien kendalanya a_{ij} , serta b = $(b_1,...,b_m)$ disebut sumber.

Dalam situasi praktis, jarang terjadi fungsi sasaran dan kendalanya berupa pernyataan tegas. Dapat terjadi fungsi sasaran tersebut koefisiennya berupa bilangan kabur, atau tanda $\leq$ pada kendala diperampat menjadi $\preccurlyeq$ dapat dibaca sebagai “pada dasarnya kurang atau sama dengan”, yang merupakan bentuk kabur dari $\leq$.

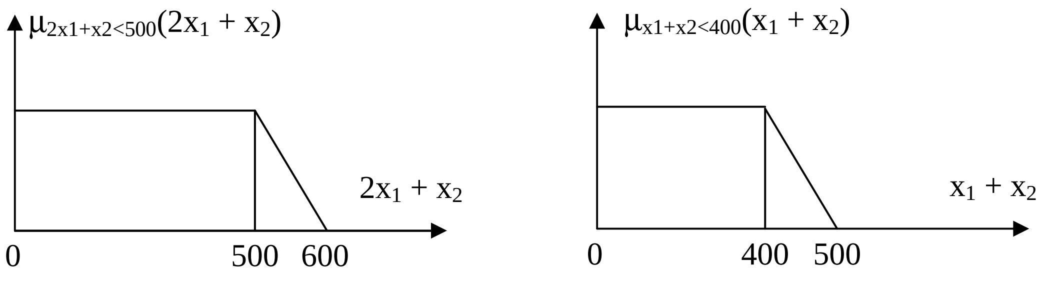
Salah satu contoh yang dapat dikemukakan misalnya ada suatu perusahaan mainan memproduksi dua jenis mainan boneka. Boneka A memberikan keuntungan Rp.4000,- perboneka dan boneka B Rp.3000,- perboneka. Setiap hari dapat diproduksi x_1 boneka A dan x_2 boneka B, sehingga keuntungannya adalah $4000x_1 + 3000x_2$. Dalam pembuatannya, boneka A memerlukan tenaga dua kali boneka B. Jika total kerja karyawan adalah 500 jam perhari, maka diperoleh kendala $2x_2 + x_2 \leq 500$. Sumber bahan baku hanya tersedia untuk 400 boneka perhari untuk boneka A dan B, berarti didapat kendala $x_1 + x_2 \leq 400$. Dengan demikian diperoleh masalah program linier :

Maksimumkan $4000x_1 + 3000x_2$ (keuntungan)

Terhadap kendala $g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 400$ (bahan baku) (2)

$g_2(x) = 2x_1 + x_2 \leq 500$ (jam pekerja)

$x_1; x_2 \geq 0$



Gambar 1. Fungsi keanggotaan jam-pekerja dan bahan baku dalam contoh 1.

Namun demikian, jam kerja karyawan dan bahan baku yang tersedia tidak perlu selalu dalam bentuk tegas/persis. Dapat terjadi beberapa karyawan menyanggupi kerja lembur atau terdapat pasokan bahan baku tambahan. Karena itu, dapat dibuat suatu toleransi pada kendala (2). Misalnya, jika jam kerja karyawan sesungguhnya, yakni $2x_1 + x_2$ kurang dari 500, maka dikatakan kendala

$2x_1 + x_2 \leq 500$ dipenuhi secara mutlak, jika jam kerja karyawan sesungguhnya, yakni $2x_1 + x_2$ lebih dari 600, maka dikatakan kendala $2x_1 + x_2 \leq 600$ secara mutlak dilanggar, dan jika $2x_1 + x_2$ terletak antara 500 dan 600, maka dapat digunakan fungsi monoton turun linier yang menyatakan derajat keterpenuhan kendala. Dengan cara serupa, dapat juga dibuat derajat keterpenuhan untuk kendala $x_1 + x_2 \leq 400$. Gambar 1. menunjukkan fungsi keanggotaan tersebut.

Contoh di atas merupakan jenis pertama dari program linier kabur, yakni *program linier dengan sumber kabur*. Dengan perhitungan sederhana, diperoleh penyelesaian program linier dalam contoh 1, sebagaimana dinyatakan dalam tabel 1 berikut.

Tabel 1. Penyelesaian program linier tegas dan kabur

Tegas (μ = 1)	Kabur (μ = 0,5)
$X_1 = 100$; $x_2 = 300$; z = 1.300.000	$x_1 = 100$; $x_2 = 350$; z = 1.400.000
Kendala: $g_1(x) \leq 400$; $g_2(x) \leq 500$	Kendala: $g_1(x) \leq 450$; $g_2(x) \leq 550$

Jenis kedua muncul pada kekaburan koefisien 4000 dan 3000. Keuntungan yang dinyatakan dalam bentuk tegas, semacam Rp.4000,- sering tidak terjadi dalam situasi nyata. Dapat terjadi, akibat adanya fluktuasi pasar, keuntungan tersebut menjadi tidak persis Rp.4000,-. Dengan demikian masuk akal bila digunakan koefisien bilangan kabur pada fungsi sasaran; dan itu merupakan jenis kedua dari program linier kabur, yakni: *program linier dengan koefisien sasaran kabur*.

Jenis ketiga dari kekaburan dapat muncul pada koefisien kendala. Karena ketidakajegan hasil kerja manusia, maka perbandingan waktu yang diperlukan untuk membuat boneka A dengan boneka B dapat saja berupa bilangan kabur "*sekitar 2*". Demikian juga, boneka A dan boneka B mungkin memerlukan bahan baku yang tidak persis ukurannya. Itu menghasilkan jenis ketiga program linier kabur, yakni *program linier dengan koefisien kendala kabur*.

Dari uraian di atas, setidaknya dapat diklasifikasikan adanya tiga jenis program linier kabur. Melalui tulisan ini akan dikupas lebih lanjut ketiga jenis program linier kabur tersebut.

2. PROGRAM LINIER DENGAN SUMBER KABUR

Pandang masalah program linier yang dirumuskan dalam bentuk

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimumkan} & cx \\ \text{Terhadap kendala} & Ax \preccurlyeq b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

Misalkan $t_i(>0)$ menyatakan toleransi sumber ke-i, yakni b_i, maka ketaksamaan kabur $(Ax)_i \preccurlyeq b_i$ dapat dinyatakan sebagai $(Ax)_i \leq b_i + \theta t_i$ dengan $\theta \in [0,1]$. Dengan kata lain, kendala kabur $(Ax)_i \preccurlyeq b_i$ didefinisikan sebagai himpunan kabur i dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } (Ax)_i < b_i \\ 1 - [(Ax)_i - b_i]/t_i & \text{jika } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + t_i \\ 0 & \text{jika } (Ax)_i > b_i + t_i \end{cases} \tag{4}$$

Dengan demikian masalahnya menjadi menentukan x sehingga cx dan $\mu_i(x)$ termaksimumkan untuk i = 1,2,…, m.

Werners (dalam Wang, 1997) mengusulkan cara berikut untuk menyelesaikan masalah tersebut. Mula-mula diselesaikan dua masalah program linier baku berikut:

$$\begin{array}{ll} \text{maksimumkan} & cx \\ \text{terhadap kendala} & (Ax)_i \leq b_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maksimumkan} & cx \\ \text{terhadap kendala} & (Ax)_i \leq b_i + t_i,\ i = 1,2,\ldots,m \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{6}$$

Misalkan x^0 dan x^1 berturut-turut penyelesaian (5) dan (6), dan didefinisikan $z^0 = cx^0$ dan $z^1 = cx^1$. Fungsi keanggotaan berikut didefinisikan untuk menyatakan derajat keoptimalan :

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika cx} > z^1 \\ 1 - \dfrac{z^1 - cx}{z^1 - z^0} & \text{jika } z^0 \le cx \le z^1 \\ 0 & \text{jika cx} < z^0 \end{cases} \tag{7}$$

jika cx ≥ z^1 maka didapat $\mu_0(x)$ = 1, yang memberikan derajat maksimum keoptimalan;

jika cx ≥ z^0 maka didapat $\mu_0(x)$ = 0, yang memberikan derajat minimum dari keoptimalan; dan jika cx terletak antara z^1 dan z^0 maka derajat keoptimalan bergerak dari 1 ke 0.

Karena kendala dan fungsi sasaran berturut-turut dinyatakan oleh fungsi keanggotaan (4) dan (7) maka dapat digunakan metode max-min (lihat Asikin, 2000, 2002) untuk menyelesaikan masalah optimasi sasaran darab. Artinya, masalah menjadi :

$$\text{maks}_{x \ge 0} \ \min[\mu_0(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)] \tag{8}$$

atau setara dengan

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan} && \alpha \\ &\text{terhadap kendala} && \mu_0(x) \ge \alpha \quad i = 1,2,\ldots,m \\ & && \alpha \in [0,1], \quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dengan menggantikan (4) dan (7) pada (9), masalah program linier dengan sumber kabur (3) dapat diselesaikan dengan menyelesaikan masalah program linier baku berikut:

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan} && \alpha \\ &\text{terhadap kendala} && cx \ge z^1 - (1-\alpha)(z^1 - z^0) \\ & && (Ax)_i \le b_i + (1-\alpha)t_i, \ 1 = 1,2,\ldots,m \\ & && \alpha \in [0,1], \quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Berikut akan diberikan contoh aplikasinya (Lai dan Hwang 1992)

Amati masalah seleksi ***produk-mix*** berikut :

Maksimumkan $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$ (keuntungan)

Terhadap kendala $g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \preccurlyeq 15$ (orang-minggu)

$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \preccurlyeq 80$ (bahan Y) (11)

$g_3(x) = 3x1 + 5x2 + 10x3 + 15x4$ □ 100 (bahan Y)

$x1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$

dengan toleransi untuk orang-minggu, bahan Y dan Z berturut-turut adalah $t_1 = 5$, $t_2 = 40$, $t_3 = 30$. Dengan menyelesaikan (5) dan (6) didapat $z_0 = 99{,}29$ dan $z^1 = 130$. Berdasarkan (10) masalah tersebut setara dengan :

Minimumkan θ

Terhadap kendala $z = 4x_1 + 5x2 + 9x3 + 11x4 \geq 130\text{-}30{,}\ 71\theta$

$g1(x) = x1 + x2 + x3 + x4 \leq 15 + \theta$ (orang-minggu)

$g2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40\theta$ (bahan Y) (12)

$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30\theta$ (bahan Y)

$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0,\ \theta \in [0,1]$

dengan $\theta = 1 - \theta$. Penyelesaiannya adalah $z^* = 114{,}65$ pada $\theta = 0{,}5$.

3. PROGRAM LINIER DENGAN KOEFISIEN SASARAN KABUR:

Pandang masalah program linier yang dirumuskan dalam bentuk

Maksimumkan $\tilde{c}\, x$

Terhadap kendala $Ax \leq b$ (13)

$x \geq 0$

dengan $\tilde{c} = \left(\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n\right)$ merupakan vektor dengan unsur bilangan kabur.

Tanpa mengurangi kerampatannya dan untuk sederhananya, dimisalkan $\tilde{c}_i$ adalah bilangan kabur segitiga dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{c}_i}\left(x; c_i^-, c_i^0, c_i^+\right)$.

Dengan menulis $\tilde{c}_i = \left(c_i^-, c_i^0, c_i^+\right)$ maka (13) menjadi :

Maksimumkan $\left(c^- x, c^0 x, c^+ x\right) = \sum_i \left(c_i^- x_i, c_i^0 x_i, c_i^+ x_i\right)$

Terhadap kendala $\quad Ax \le b \qquad (14)$

$x \ge 0$

dengan $c^- = \left(c_1^-,\ldots,c_n^-\right)$, $c^0 = \left(c_1^0,\ldots,c_n^0\right)$, $c^+ = \left(c_1^+,\ldots,c_n^+\right)$. Ini merupakan masalah program linier dengan sasaran darab. Ada beberapa pendekatan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Dalam tulisan ini diberikan dua macam pendekatan.

Pendekatan pertama adalah mengkombinasikan dan menyederhanakan tiga sasaran menjadi satu fungsi sasaran. Pengkombinasian dan penyederhanaan yang diusulkan oleh Tanaka, Ichihashi dan Hasai (Lai dan Hwang, 1992) dilakukan dengan membuat bobot rerata pada fungsi sasaran (14). Mereka mengusulkan bobot rerata yang paling mendekati yakni :

$$\frac{\left(4c^0 + c^- + c^+\right)x}{6}$$

Dengan demikian masalah pada (14) dapat diubah menjadi masalah program linier baku berikut :

Maksimumkan $\quad \dfrac{\left(4c^0 + c^- + c^+\right)x}{6}$

Terhadap kendala $\quad Ax \le b \qquad (15)$

$x \ge 0$

Bentuk lain dari bobot rerata, juga dapat digunakan.

Cara kedua dimulai dengan dasar pemikiran bahwa sasarannya adalah memaksimumkan bilangan kabur segitiga $\left(c^- x, c^0 x, c^+ x\right)$. Dengan demikian dapat dilakukan dengan memaksimumkan c^0x (pusat), meminimumkan $c^0x - c^-x$ (kaki kiri) dan memaksimumkan $c^+x - c^0x$ (kaki kanan). Berarti masalah (14) diubah menjadi masalah program linier bersasaran darab berikut:

minimumkan $\quad z_1 = (c^0 - c^-)x$

maksimumkan $\quad z_2 = c^0x$

maksimumkan $\quad z_3 = (c^+ - c^0)x \qquad (16)$

terhadap kendala $\quad Ax \le b$

$\quad x \ge 0$

Suatu cara penyelesaian untuk (16) dilakukan dengan mencermati tiga fungsi sasaran di atas berdasarkan pada fungsi keanggotaannya dan kemudian memaksimumkan potongan-αnya. Diperoleh :

$$\begin{aligned}
z_1^P &= \min_{x\in X}\left(c^0 - c^-\right)x; z_1^N = \text{maks}_{x\in X}\left(c^0 - c^-\right)x\\
z_2^P &= \text{maks}_{x\in X}\, c^0 x; z_2^N = \min_{x\in X}\, c^0 x \qquad (17)\\
z_3^P &= \min_{x\in X}\left(c^+ - c^0\right)x; z_3^N = \min_{x\in X}\left(c^+ - c^0\right)x
\end{aligned}$$

dengan X = {x | Ax ≤ b, x ≥ 0}. Penyelesaian z_i^P disebut ***penyelesaian ideal positif*** dan z_i^N disebut ***penyelesaian ideal negatif.*** Selanjutnya didefinisikan tiga fungsi keanggotaan berikut, yang mewakili tiga sasaran :

$$\mu_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \left(c^0 - c^-\right)x < z_1^P \\ \dfrac{z_1^N - \left(c^0 - c^-\right)x}{z_1^N - z_1^P} & \text{jika } z_1^P \le \left(c^0 - c^-\right)x \le z_1^N \\ 0 & \text{jika } \left(c^0 - c^-\right)x > z_1^N \end{cases} \qquad (18)$$

$$\mu_{z_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \left(c^0 - c^-\right)x < z_1^P \\ \dfrac{c^0 x - z_2^N}{z_2^P - z_2^P} & \text{jika } z_1^P \le \left(c^0 - c^-\right)x \le z_1^N \\ 0 & \text{jika } \left(c^0 - c^-\right)x > z_1^N \end{cases} \qquad (19)$$

$$\mu_{z_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \left(c^+ - c^0\right)x > z_3^P \\ \dfrac{\left(c^+ - c^0\right)x - z_2^N}{z_2^P - z_1^N} & \text{jika } z_3^N \le \left(c^+ - c^0\right)x \le z_3^P \\ 0 & \text{jika } \left(c^+ - c^0\right)x > z_3^N \end{cases} \qquad (20)$$

Akhirnya, masalah di atas diselesaikan dengan cara menyelesaikan masalah program linier baku berikut :

maksimumkan α

terhadap kendala $\mu_{z_i}(x) \geq \alpha,\ i = 1,2,\ldots,3$

$$Ax \leq b \qquad (21)$$

$$x \geq 0$$

4. PROGRAM LINIER DENGAN KOEFISIEN KENDALA KABUR

Pandang masalah program linier yang dirumuskan dalam bentuk

Maksimumkan cx

Terhadap kendala $\tilde{A}x \leq b \qquad (22)$

$$x \geq 0$$

dengan $\tilde{A} = \lfloor \tilde{a}_{ij} \rfloor$ merupakan matriks dengan unsur-unsur bilangan kabur.

Tanpa mengurangi kerampatannya dan untuk menyederhanakan, dianggap bahwa matriks $\tilde{A}$ = [a_{ij}] unsur-unsurnya bilangan kabur segitiga, yakni $\tilde{a}_{ij}$ = $\left(a_{ij}^{-}, a_{ij}^{0}, a_{ij}^{+}\right)$ dan $\tilde{A}$ = (A^{-}, A^{0}, A^{+}), dengan A^{-} = $\lfloor a_{ij}^{-} \rfloor$, A^{0} = $\lfloor a_{ij}^{0} \rfloor$, A^{+} = $\lfloor a_{ij}^{+} \rfloor$. Masalah (22) menjadi :

maksimumkan cx

terhadap kendala $\dfrac{\mathbf{4(A^0 + A^- + A^+)}}{\mathbf{6}} \leq b \qquad (23)$

$$x \geq 0$$

5. PROGRAM LINIER DENGAN SUMBER KABUR, SASARAN KABUR DAN KENDALA KABUR

Masalah program linier lainnya merupakan kombinasi dari tiga masalah program linier di atas dan dapat diselesaikan dengan menggunakan cara serupa. Sebagai contoh, amati masalah berikut, yang semua koefisiennya bilangan kabur :

Maksimumkan $\tilde{c}$ x

Terhadap kendala $\tilde{A}\,x \le \tilde{b}$ (24)

$x \ge 0$

Misalkan $\tilde{c}$, $\tilde{A}$, dan $\tilde{b}$ merupakan bilangan kabur segitiga, yakni $\tilde{c}$ = (c^{--}, c^0, c^+); $\tilde{A}$ = (A^{--}, A^0, A^+); dan $\tilde{b}$ = (b^{--}, b^0, b^+), maka (24) dapat diubah menjadi masalah program linier bersasaran darab berikut:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimumkan} && z_1 = (c^0 - c^-)x \\
&\text{maksimumkan} && z_2 = c^0x \\
&\text{maksimumkan} && z_3 = (c^+ - c^0)x \qquad (25)\\
&\text{terhadap kendala} && A^{--}\,x \le b^{—} \\
& && A^0x \le b^0 \\
& && A^+x \le b^+ \\
& && x \ge 0
\end{aligned}
$$

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan cara yang serupa dengan penyelesaian pada (16).

6. PENUTUP

Konsep tentang program linier kabur merupakan salah satu wujud dari adanya pengembangan baru dalam konsep tentang himpunan yakni himpunan kabur. Beberapa konsep lain dalam himpunan kabur yang seperti relasi kabur dan bilangan kabur sangat berperan dalam program linier kabur.

Dalam program linier kabur, setidaknya dikenal 4 jenis klasifikasi masalah, yakni masalah dengan sumber kabur, sasaran kabur, kendala kabur, serta kombinasi dari 2 atau 3 hal tersebut.

DAFTAR RUJUKAN

1. Asikin.M. *Relasi kabur*. Media MIPA UNNES, Edisi No 3 Desember XIII, 276-286. 2000.
2. ________. Kesetaraan Metode Prinsip Perluasan dan Metode Potongan dalam Bilangan Kabur. Jurnal MIPA Edsi Agustus, Vol 25, Nomor 2, 109- 119, 2002.

3. Klir, G.J, Yuan. B. Fuzzy Set and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentise Hall. 1995.
4. Lai, Jou & Wang, L, Fuzzy Mathematical Programming. Springer-Verlag. New York ,1992.
5. Wang, L, .A Course in Fuzzy Systems and Control, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 1997.
6. Zimmermann, H.J, Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston. 1991.